Equations de Maxwell et perturbations singulieres

B. Cockburn

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 443

ÉQUATIONS DE MAXWELL ET PERTURBATIONS SINGULIÈRES

Bernardo COCKBURN

Septembre 1985

EQUATIONS DE MAXWELL ET PERTURBATIONS SINGULIERES

Bernardo COCKBURN.

EQUATIONS DE MAXWELL ET PERTURBATIONS SINGULIERES

I. INTRODUCTION

Dans [1] on a étudié les équations de Maxwell 1D dans des milieux polarisables. L'étude a été faite en deux étapes : d'abord, on a supposé que les paramètres étaient "suffisament" réguliers pour nous permettre l'emploi de la théorie des semi-groupes continus de contractions, à l'aide de laquelle on a pu obtenir l'existence et l'unicité des solutions "généralisées" et "classiques"; ensuite, dans le but d'affaiblir les hypothèses sur les paramètres, on a obtenu des estimations a priori, à l'aide desquelles on a passé à la limite.

Dans [2], on a présenté une approche différente. D'abord, elle ne fait pas appel à la théorie des semi-groupes continus et ensuite, elle utilise directement des techniques énergétiques, voire des estimations a priori qui utilisent fortement quelques propriétés de positivité des opérateurs qui apparaîssent dans les équations. Cette approche, différente de la première, travaille directement sur les champs électrique et magnétique au lieu de travailler sur le seul champ électrique.

Dans ce rapport, on tente un nouveau chemin : la transformée de Fourier et la technique des perturbations singulières dans les problèmes aux limites. Pourquoi cette nouvelle approche? D'abord, parce que notre problème étant linéaire, la transformée de Fourier nous permet de le convertir en un simple problème elliptique. On passe ainsi d'un problème d'évolution à un problème stationnaire, pour chaque $\omega \in \mathbb{R}$ fixée, plus facile à aborder. Ensuite, parce que, avec cette technique, il est possible d'obtenir des résultats de régularité optimaux dans les espaces H^s, $s \in \mathbb{R}$. Finalement, parce que sans trop de difficultés supplémentaires, il est possible d'appliquer cette méthode à d'autres problèmes plus compliqués. Plus compliqués parce qu'ils portent des conditions aux bords plus sophistiquées,ou des contraintes supplémentaires, ou parce qu'ils sont posés dans plusieurs dimensions d'espace.

Reconsidérons donc les équations de Maxwell 1D sans le domaine espace-fréquence

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \partial_x H + \sigma E = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_x E + i\,\omega\,\mu_0 H = 0 & \text{dans } \Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Comme dans [1] on élimine le champ magnétique H et on obtient une équation pour le seul champ électrique

$$(1.2) \qquad \begin{cases} -\partial_{xx} E + \lambda E = 0 & \text{dans } \Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R} \\ \lambda = i\,\omega\,\mu_0\,\sigma. \end{cases}$$

Il est clair que si E est solution de (1.2), alors (E,H) où

$$(1.2)' \qquad H = -(i\,\omega\,\mu_0)^{-1}\,\partial_x E$$

est solution de (1.1). Dorénavant, on ne va considérer que le problème pour le champ électrique E. Plus précisément, on va étudier le problème de Dirichlet de trouver E satisfaisant les équations suivantes :

$$(1.3) \qquad \begin{cases} -\Delta E + \lambda E = 0 & \text{dans } \Omega \\ E = \Phi & \text{dans } \partial\Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Il faut remarquer que quand dans (1.3) $\Omega \subset \mathbb{R}$, la première équation de (1.3) devient (1.2) et (E,H), H donné par (1.2)' est solution des équations de Maxwell 1D (et 2D). Mais ceci n'est vrai que dans ces cas. En effet, écrivons les équations de Maxwell 3D,

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\ H = \sigma\ E \\ \mathrm{rot}\ E = -\ i\ \omega\ \mu_0\ H \\ \mathrm{div}\ H = 0 \\ \mathrm{div}\ E = 0 & \text{dans } \Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si le champ magnétique H est éliminé, on obtient pour E,

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ E + \lambda E = 0 \\ \\ \mathrm{div}\ E = 0 & \text{dans } \Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Encore une fois, si E est solution de (1.5), alors (E,H) où

$$(1.4)' \qquad H = -(i\ \omega\ \mu_0)^{-1}\ \mathrm{rot}\ E$$

est solution de (1.4). Finalement, pour comparer les équations vérifiées par E aux équations (1.3), on utilise l'identité

$$\mathrm{rot.rot} = -\ \Delta + \mathrm{grad(div)}$$

et donc, on peut écrire pour E

$$(1.6)\qquad \begin{cases} -\ \Delta E + \lambda E = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}\ E = 0 & \text{dans } \Omega \\ B(E) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\ ,\ \omega \in \mathbb{R}\ , \end{cases}$$

d'où la différence entre les équations (1.3) et (1.6).

Maintenant, si l'on pose, (F est la transformation de Fourier)

$$(1.7) \qquad \begin{cases} e = \bar{F}^{1}(E) \\ \phi = \bar{F}^{1}(\Phi) \end{cases}$$

et on suppose que ces deux fonctions ont bien un sens, alors e est solution du problème d'évolution suivant :

$$(1.8) \qquad \begin{cases} -\Delta e + \bar{F}^{1}(\lambda) * e = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ e = \phi & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Ces équations définissent donc l'application $\phi \to e$, qui est le sujet de cette étude.

L'étude de cette application sera faite en deux étapes : dans la première, on étudie les équations (1.3), on établit d'abord l'existence et l'unicité de sa solution (paragraphe 2), ensuite (paragraphe 3), on établit deux groupes d'estimations a priori : le premier décrit l'application $\omega \to (\lambda(\omega) \to)\ ||E||$ et sera essentiel pour assurer un sens à la première expression de (1.7), le deuxième décrit la dépendance de E par rapport à λ et sera très utile pour préciser la dépendance de l'application $\phi \to e$ par rapport à ce paramètre. Dans la deuxième étape (paragraphe 4), on donne un sens à (1.7) et on "reporte" sur e les propriétés déjà obtenues pour E, ce qui se fait d'une façon très directe.

Au paragraphe 5, on donne quelques exemples d'application, et au paragraphe 6, on fait quelques commentaires pour conclure cette étude.

II. SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITE DE LA SOLUTION DES EQUATIONS (1.3)

On va noter par $(.,.)$ le produit interne de $V = L^2(\Omega,\mathbb{C})$ et par $||.||$ sa norme. Pour résoudre (1.3), on se ramène à un problème avec des conditions aux limites homogènes. Soit $v \in H^1(\Omega,\mathbb{C})$ tel que $v = \Phi$ sur $\partial\Omega$, alors si l'on pose $u = E-v$, u est solution du problème variationnel suivant :

$$
(P) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in H = H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) : \\ \\ \quad a(u,w) = \ell(w) \qquad \forall\, w \in H \end{cases}
$$

où

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} a(u,w) = (\text{grad } u, \text{ grad } \bar{w}) + (\lambda u,\bar{w}) \\ \\ \ell(w) = -(\text{grad } v, \text{ grad } \bar{w}) - (\lambda v,\bar{w}) \ . \end{cases}
$$

Il est clair que le lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution de (P) si la partie réelle de la forme bilinéaire a est H-elliptique. Or, on a

$$
(a(u,u))_r = ||\text{grad } u||^2 + (\lambda_r u,\bar{u})
$$

où l'indice r indique que l'on prend la partie réelle, et donc on peut appliquer le lemme de Lax-Milgram si l'on a

$$
(2.2) \qquad \exists\ \lambda_{ro} > 0 : \lambda_r(x) \geq \lambda_{ro} \qquad x \text{ pp. dans } \Omega,
$$

(si Ω est borné, on peut prendre $\lambda_{ro} = 0$).

Montrons maintenant que la condition (2.2) peut être remplacée par une autre condition qui ne porte que sur λ_i (où l'indice i indique que l'on a pris la partie imaginaire).

Pour voir ceci, on va introduire provisionnellement l'ensemble Λ, dépendant de trois paramètres strictement positifs

$$(2.3)\qquad \Lambda(c,\lambda_\infty,\lambda_{io}) = \{\lambda \in L^\infty(\Omega,\mathbb{C}) \ : \ ||\lambda||_\infty \le \lambda_\infty$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_r+\varepsilon \ge 0 & \text{pp dans } \Omega, \\ \lambda_i \ge \lambda_{io} & \text{pp dans } \Omega \\ (\text{ou } \lambda_i \le -\lambda_{io})\}, & \end{array}$$

et on va définir l'application

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \to H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \\ & v \to u \end{aligned}$$

où u est solution du problème auxiliaire suivant

$$(\mathrm{P})' \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \ : & \\ a_{\varepsilon_0}(u,w) = \ell_{\varepsilon_0}(w) & \forall\, w \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \end{array} \right.$$

où

$$(2.1)' \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{\varepsilon_0}(u,w) = a(u,w) + \varepsilon_0(u,\bar{w}) \\ \ell_\varepsilon(w) = \ell(w) + \varepsilon_0(v,\bar{w}) \end{array} \right.$$

ε_0 étant une constante réelle strictement positive à déterminer plus tard.

On procède en trois étapes :

- première étape :

soit $\lambda \in \Lambda(\varepsilon_0/2,\lambda_\infty,\lambda_{io})$, alors $(\lambda+\varepsilon_0)$ vérifie la condition (2.2) avec $\lambda_{ro} = \varepsilon_0/2$ et donc ϕ est bien définie.

Montrons maintenant qu'elle est une contraction. Soit donc $\phi(v_1) = u_1$ et $\phi(v_2) = u_2$. On a, en utilisant (2.1)', (2.1).

$$a(u_1-u_2,w) + \varepsilon_0(u_1-u_2,\bar{w}) = \varepsilon_0(v_1-v_2,\bar{w}) \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \ .$$

En posant $w = u_1-u_2$, on obtient aisément

$$||\mathrm{grad}(u_1-u_2)||^2 \le \varepsilon_0||v_1-v_2||.||u_1-u_2|| + (\lambda_\infty+\varepsilon_0)||u_1-u_2||^2$$

$$||u_1-u_2||^2 \le \lambda_{io}^{-1}\,\varepsilon_0 \ . \ ||v_1-v_2||.||u_1-u_2||$$

d'où

$$(2.4) \qquad ||u_1-u_2||_{H^1} \le \varepsilon_0(\lambda_{io}^{-1} + \lambda_i^{-2}(\lambda_\infty+\varepsilon_0))^{1/2}\ ||v_1-v_2|| \ .$$

Pour que ϕ soit une contraction, il suffit donc de prendre ε_0 assez petit. Fixons maintenant ce ε_0. ϕ est une contraction et par conséquent elle possède un unique point fixe u qui est en fait l'unique solution de (P) avec λ vérifiant

$$\lambda_r + \varepsilon_0/2 \ge 0 \qquad \text{pp. dans } \Omega \ ,$$

- deuxième étape :
  si maintenant on prend $\lambda \in \Lambda(\frac{3}{2}\,\varepsilon_0,\lambda_{io},\lambda_\infty)$ alors λ vérifie

$$(\lambda_r + \varepsilon_0) + \varepsilon_0/2 \ge 0 \qquad \text{pp. dans } \Omega$$

  et par l'étape précédente le problème (P)' admet une unique solution. Donc ϕ est bien définie dans ce cas; en plus, ε_0 étant fixé, (2.4) implique qu'elle est aussi une contraction et par conséquent elle possède un unique point fixe U solution du problème (P).

- troisième étape :
  maintenant on n'a qu'à répéter n = partie entière de $((\lambda_\infty-\varepsilon_0/2)/\varepsilon_0)$ fois l'argument de l'étape précédente pour démontrer que si

$$(2.5) \qquad \left.\begin{array}{l} \exists\ \lambda_{io} > 0 : \lambda_i(x) \geq \lambda_{io} \\ \text{ou} \\ \lambda_i(x) \leq -\lambda_{io} \end{array}\right\} \quad x \text{ pp. dans } \Omega$$

Le problème (P) admet une unique solution.

On a ainsi démontré le résultat suivant

<u>Proposition</u>(2.1) (existence et unicité de la solution des équations (1.3))

Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée

$$(2.6) \qquad .\ \exists\ \lambda_{ro} > 0 : \lambda_r(x) \geq \lambda_{ro} \qquad x \text{ pp. dans } \Omega \quad (\lambda_{ro} \geq 0 \text{ si } \Omega \text{ borné})$$

$$(2.6)' \qquad \left.\begin{array}{l} .\ \exists\ \lambda_{io} > 0 : \lambda_i(x) \geq \lambda_{io} \\ \text{ou} \\ \lambda_i(x) \leq -\lambda_{io} \end{array}\right\} \quad x \text{ pp. dans } \Omega\ .$$

Alors, les équations (1.3), avec ϕ dans $H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})$, admettent une unique solution E dans V_E

$$V_E = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{C}) : \Delta V \in L^2(\Omega,\mathbb{C})\}.$$

$\square$

III. <u>OBTENTION DES ESTIMATIONS A PRIORI SUR LA SOLUTION DES EQUATIONS</u> (1.3)

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser l'application $\omega \to ||E||$. Dans le but de simplifier la présentation du travail, on va supposer que l'on a :

$$(3.1) \qquad \lambda(-\omega) = \overline{\lambda(\omega)} \qquad \omega \text{ pp. dans } \mathbb{R}^+$$

et par conséquent, on ne va considérer que les fréquences positives. D'autre part, on va supposer que l'application $\omega \to \lambda(\omega)$ est bornée sur les intervalles bornés qui ne contiennent pas l'origine, et on va permettre que $||\lambda(\omega)|| \to \infty$ lorsque $\omega{\downarrow}0$, ou $\omega{\to}\infty$, ce qui est souvent le cas dans les applications.

Ce paragraphe sera donc divisé en trois parties. Dans la première, on estime $||E||$ en fonction de la fréquence en faisant une hypothèse assez générale sur l'application $\omega \to \lambda(\omega)$. Dans la deuxième, on précise le type de singularité que cette application peut avoir à l'origine, ou à l'infini, et on obtient de nouvelles estimations sur $||E||$, beaucoup plus fines, à l'aide de la théorie des perturbations singulières. Finalement, dans la troisième partie, on utilise les résultats précédents pour obtenir la dépendance de E par rapport au paramètre λ .

3.1. Premières estimations a priori

Soit E l'unique solution des équations (1.3), alors

$$(3.2) \qquad ||\text{grad } E||^2 + (\lambda E,\bar{E}) = (\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})$$

où, par abus de notation, on a pris

$$(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial n}.\bar{\Phi} \;\; d\gamma .$$

On doit considérer deux cas, selon qu'on emploie la première ou la deuxième hypothèse (sur λ) de la proposition (2.1).

<u>Premier cas</u> (hypothèse sur la partie réelle (2.6)) :
En prenant la partie réelle de (3.2), on obtient

$$||\text{grad } E||^2 \le |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|$$

$$||E||^2 \le \lambda_{ro}^{-1} \; |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|$$

et par (1.3),

$$||\Delta E|| \le ||\lambda||_\infty \, \lambda_{ro}^{-1/2} \; |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})| .$$

D'autre part, on a

$$(3.3) \qquad |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})| \le ||\Phi||_{H^{1/2}} \; (||\text{grad } E|| + ||\Delta E||)$$

où évidemment $H^{1/2} = H^{1/2}(\partial\Omega)$. Et donc

$$|(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|^{1/2} \le ||\Phi||_{H^{1/2}} \; (1 + ||\lambda||_\infty \, \lambda_{or}^{-1/2}) .$$

Par conséquent

$$(3.4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &||E|| \le (1 + ||\lambda||_\infty \, \lambda_{or}^{-1/2}) \; \lambda_{or}^{-1/2} \; ||\Phi||_{H^{1/2}} \\ &||\text{grad } E|| \le (1 + ||\lambda||_\infty \, \lambda_{or}^{-1/2}) \; ||\Phi||_{H^{1/2}} \\ &||\Delta E|| \le (1 + ||\lambda||_\infty \, \lambda_{or}^{-1/2}) ||\lambda||_\infty \; \lambda_{or}^{-1/2} \; ||\Phi||_{H^{1/2}} . \end{aligned} \right.$$

Deuxième cas (hypothèse sur la partie imaginaire (2.6)')

En prenant la partie imaginaire de (3.2), on obtient

$$||E||^2 \le \lambda_{io}^{-1} \; |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|$$

et si l'on prend maintenant la partie réelle

$$||\text{grad } E||^2 \le (1 + ||\lambda||_\infty \, \lambda_{io}^{-1}) \; |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})| .$$

Par (1.3)

$$||\Delta E|| \leq ||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2} \; |(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|^{1/2}$$

et par (3.3)

$$|(\frac{\partial E}{\partial n},\bar{\Phi})|^{1/2} \leq ||\Phi||_{H^{1/2}} \; ((1 + ||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1})^{1/2} + ||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2}) \; .$$

Finalement, on a

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} ||E|| \leq ((1+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1})^{1/2}+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2})\lambda_{io}^{-1/2} \; ||\Phi||_{H^{1/2}} \\ \\ ||\mathrm{grad}\; E|| \leq ((1+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1})^{1/2}+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2}) \\ \qquad\qquad\qquad (1+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1}) \; ||\Phi||_{H^{1/2}} \\ \\ ||\Delta E|| \leq ((1+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1})^{1/2}+||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2})||\lambda||_\infty \lambda_{io}^{-1/2} \; ||\Phi||_{H^{1/2}} \; . \end{array} \right.$$

Maintenant, on fait l'hypothèse suivante sur l'application $\omega \to \lambda(\omega)$

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \quad 0 \leq \omega_{01} \leq \omega_{02} \leq \infty, \exists \; c = c(\omega_{01},\omega_{02}) \; : \\ \left. \begin{array}{l} ||\lambda(\omega)||_\infty \lambda_{r0}^{-k}(\omega) \leq c \\ \text{ou} \quad ||\lambda(\omega)||_\infty \lambda_{io}^{-k}(\omega) \leq c \end{array} \right\} \quad \forall \; \omega_{01} \leq \omega \leq \omega_{02} \quad , \quad k=1,1/2 \; . \end{array} \right.$$

On a donc démontré la résultat suivant

Proposition (3.1) (premières estimations a priori sur la solution des équations (1.3))

Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition (2.1) et l'hypothèse (3.6).

Alors, si E est la solution de (1.3) avec $\omega = \omega_0$, pour tout intervalle $I = [\omega_{01}, \omega_{02}]$, $\omega_{01} \geq 0$, $\omega_{02} \leq \infty$, il existe une constante $c = c(\omega_{01}, \omega_{02})$ telle que,

$$||E||_{H^1(\Omega,\mathbb{C})} + ||\Delta E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c \; ||\Phi||_{H^{1/2}(\Omega\partial,\mathbb{C})}$$

$$\forall \; \omega_0 \in I \; . \qquad \square$$

3.2. Un problème de perturbations singulières : des nouvelles estimations sur la solution de (1.3)

Maintenant on suppose que l'application $\omega \to \lambda(\omega)$ possède des singularités à l'origine et à l'infini. Plus précisément, on va supposer que l'on a

$$\lambda(x,\omega) = \Lambda(x) \; \varepsilon^{-1}(\omega) \qquad (x,\omega) \text{ pp. dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{3.7}$$

où

$$\Lambda \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^+) \; : \exists \; \Lambda_0 > 0 \; : \; \Lambda_0 \leq \Lambda(x) \quad x \text{ pp. dans } \Omega, \tag{3.7)'}$$

et

$$(3.7)'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \; r_0, r_\infty \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \varepsilon_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}) \; : \\ \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) \; . \; \omega^{r_0} \, (1+\omega^2)^{-(r_0+r_\infty)/2} \qquad \omega \text{ pp. dans } \mathbb{R}^+ \\ \exists \; \underset{\sim}{\varepsilon}_0 > 0 \; , \; A > 0 \; : \\ \left. \begin{array}{l} |\varepsilon_0(\omega)| \geq \underset{\sim}{\varepsilon}_0 \\ \arg \varepsilon_0(\omega) \in \,]-\pi+A, \pi-A[\end{array} \right\} \; \omega \text{ pp. dans } \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que si λ vérifie les conditions (3.7), (3.7)' et (3.7)", elle vérifie aussi au moins une des hypothèses (2.6) et (2.6)', et en plus la condition (3.6) pour $k=1$.

En fait l'intérêt de supposer λ comme dans (3.7) apparaît seulement quand $|\varepsilon| \to 0$, c'est-à-dire quand $||\lambda(\omega)|| \to \infty$, et dorénavant on va supposer que ceci est le cas quand $r_0 > 0$ et $\omega \downarrow 0$, ou quand $r_\infty > 0$ et $\omega \to \infty$.

Ceci étant, on va maintenant obtenir des nouvelles estimations sur $||E||$ (en fonction de $|\varepsilon|$!) en utilisant la théorie des perturbations singulières développée dans [3], pp. 94-126. On va procéder en plusieurs étapes.

<u>Première étape</u> (introduction du problème auxiliaire (P_ε))

Considérons le problème suivant

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \text{trouver } v_\varepsilon \in H = H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \text{ solution de} \\ \varepsilon a(v_\varepsilon,w) + (\Lambda v_\varepsilon,w) = (\Lambda F_\varepsilon,w) \quad \forall\, w \in H \end{cases}$$

où

$$(3.8) \quad \begin{cases} a(v_\varepsilon,w) = (\operatorname{grad} v_\varepsilon,\operatorname{grad} \bar{w}) \\ ||F_\varepsilon - F_0|| \le c|\varepsilon|\ ||F_0|| \quad , \quad ||F_\varepsilon|| \le c\ ||F_0|| \end{cases}$$

C'est en travaillant sur ce problème auxiliaire que l'on va obtenir les estimations que l'on cherche.

Les équations (1.3), compte tenu de (3.7), peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\Delta\,E + \Lambda E = 0 & \text{dans } \Omega \\ E = \Phi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si l'on prend $v_\varepsilon = E-v$ où $v \in H^1(\Omega,\mathbb{C})$ avec $v = \Phi$ sur $\partial\Omega$, v_ε est solution des équations

$$\begin{cases} \varepsilon a(v_\varepsilon,w) + (\Lambda v_\varepsilon,w) = (\Lambda F_\varepsilon,w) & \forall\, w \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \\ F_\varepsilon = \Lambda^{-1}\,\varepsilon\,\Delta v - v\,. \end{cases}$$

F_ε appartient à $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ si Δv appartient aussi à cet espace. On va choisir v comme l'unique solution dans $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ des équations suivantes

$$(P_v)\qquad \begin{cases} -\Delta v + v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = \Phi & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Avec ce choix, on a $F_\varepsilon = (\Lambda^{-1}\varepsilon-1)v \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$, $F_0 = -v$ et $||F_\varepsilon-F_0|| = ||\Lambda^{-1}\varepsilon v|| \leq ||\Lambda^{-1}||\;|\varepsilon|\;||F_0||$, et $||F_\varepsilon|| \leq ||\Lambda^{-1}\varepsilon-1||_{L^\infty}\,||F_0||$. ((3.8) est L^∞ donc vérifiée).

Remarquons en plus que l'on a

$$(3.9)\qquad ||v||_{H^1(\Omega,\mathbb{C})} = ||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}\,.$$

En effet, étant donné que

$$||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})} = \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega,C)\\ v=\Phi \text{ sur } \partial\Omega}} ||v||_{H^1(\Omega,\mathbb{C})}$$

on a :

$$||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})} \leq ||v||_{H^1(\Omega,\mathbb{C})} \quad .$$

D'autre part, tenant compte du fait que v est la solution de (P_v), on a :

$$||v||^2_{H^1} = (\text{grad } v, \text{ grad } \bar{w}) + (v,\bar{w})$$

où $w \in H^1(\Omega,\mathbb{C})$ avec $w = \Phi$ sur $\partial\Omega$. Donc

$$||v||_{H^1} \leq ||w||_{H^1}$$

d'où
$$||v||_{H^1} \leq \inf_{\substack{w\in H^1(\Omega,\mathbb{C})\\ w=\Phi \text{ sur } \partial\Omega}} ||w||_{H^1}$$
$$\leq ||\Phi||_{H^{1/2}}$$

d'où (3.9).

<u>Deuxième étape</u> (estimations sur u_ε)

Si dans l'égalité du problème (P_ε) on prend $w = u_\varepsilon$, on vérifie aisément (en procédant comme dans le paragraphe 3.1, et en utilisant les hypothèses (3.7), (3.7)', (3.7)" et (3.8), qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(3.10) \qquad ||u_\varepsilon|| \leq c\ ||F_0||$$

$$|\varepsilon|^{1/2}\ ||\text{grad } u_\varepsilon|| \leq c\ ||F_0|| \ .$$

Par conséquent, il existe une sous-suite $\{u_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ qui converge vers v_0 dans $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ faible lorsque $\varepsilon' \downarrow 0$. En plus, il est facile de voir que l'on a

$$(3.11) \qquad (\Lambda v_0,w) = (\Lambda F_0,w) \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \ ,$$

autrement dit, u_ε converge vers F_0 dans $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ faible lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

<u>Troisième étape</u> (estimations sur $u_\varepsilon - u_0$)

Il est clair que

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} ||u_\varepsilon - u_0|| &\le ||u_\varepsilon|| + ||u_0|| \\ &\le c\ ||F_0|| \end{aligned}$$

par (3.10) et parce que u_0 coïncide avec la projection de F_0 dans $L^2(\Omega,\mathbb{C})$.

Il faut remarquer que malgré le fait que u_ε soit un élément de $H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ pour $|\varepsilon| > 0$, ceci n'est pas forcément vrai pour u_0, et par conséquent (3.12) est l'unique inégalité que l'on peut obtenir. Par contre, si l'on suppose que u_0 est aussi un élément de $H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$, ce qui implicitement veut dire que ceci est vrai aussi pour F_0, alors on peut obtenir une estimation plus intéressante.

Avec cette supposition, on peut maintenant prendre $w = u_\varepsilon - u_0$ dans (P_ε) et dans (3.11). On a donc :

$$\varepsilon\ a(u_\varepsilon, v_\varepsilon - v_0) + (\Lambda v_\varepsilon, \overline{u_\varepsilon - u_0}) = (\Lambda F_\varepsilon, \overline{u_\varepsilon - u_0})$$

$$(\Lambda v_0, \overline{u_\varepsilon - u_0}) = (\Lambda F_0, \overline{u_\varepsilon - u_0}) \ .$$

Si l'on pose $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ et soustrait la deuxième égalité de la première, on obtient :

$$\varepsilon\ a(u_\varepsilon,w_\varepsilon) + (\Lambda w_\varepsilon,\overline{w_\varepsilon}) = (\Lambda(F_\varepsilon-F_0),\overline{w_\varepsilon})$$

ou encore

$$\varepsilon\ a(w_\varepsilon,w_\varepsilon) + (\Lambda w_\varepsilon,\overline{w_\varepsilon}) = (\Lambda(F_\varepsilon-F_0),\overline{w_\varepsilon}) - \varepsilon\ a(v_0,w_\varepsilon)\ .$$

Maintenant, on doit considérer séparément deux cas : $\varepsilon_r > 0$ et $\varepsilon_r \leq 0$ (ou, d'une façon équivalente $\varepsilon_i < 0$ ou $\varepsilon_i > 0$, voir (3.7)"). Les résultats sont les mêmes dans les deux cas, et donc on ne va présenter que le premier.

On suppose donc $\varepsilon_r > 0$. Alors

$$\varepsilon_r\ a(w_\varepsilon,w_\varepsilon) + (\Lambda w_\varepsilon,\overline{w_\varepsilon}) \leq c\ |\varepsilon|\ ||F_0||\ ||w_\varepsilon|| + $$
$$+ |\varepsilon|\ ||\text{grad } F_0||.||\text{grad } w_\varepsilon||$$

car $v_0 = F_0$.

Par (3.7)' et (3.8) :

$$\varepsilon_r\ ||\text{grad } w_\varepsilon||^2 + \Lambda_0\ ||w_\varepsilon||^2 \leq c\ |\varepsilon|\ ||F_0||\ ||w_\varepsilon|| +$$
$$+ |\varepsilon|\ ||\text{grad } F_0||\ ||\text{grad } w_\varepsilon||$$

par l'inégalité de Young :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_r\ ||\text{grad } w_\varepsilon||^2 + \Lambda_0\ ||w_\varepsilon||^2 \leq c\ |\varepsilon|\ ||F_0||\ ||w_\varepsilon|| +$$
$$+ \frac{1}{2}|\varepsilon|.\ \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_r}\ ||\text{grad } F_0||^2$$

et par (3.12) :

$$||w_\varepsilon||^2 \leq (\Lambda_0^{-1}(c + \frac{1}{2}|\varepsilon|/\varepsilon_r))\ |\varepsilon|\ ||F_0||^2_{H^1} .$$

Une inégalité similaire est obtenue dans le deuxième cas, et donc, par l'hypothèse (3.7)" on peut écrire que

$$(3.13) \qquad ||u_\varepsilon - u_0|| \leq c\ |\varepsilon|^{1/2}\ ||F_0||_{H^1} \qquad (F_0 \in H^1_0(\Omega,\mathbb{C})) .$$

Quatrième étape (estimations par interpolation)

Des inégalités (3.12) et (3.13), on obtient, voir [3] pp. 125-127, que l'on a

$$(3.14) \qquad ||u_\varepsilon - u_0|| \leq c\ |\varepsilon|^{1/4}\ ||F_0||_{H^1} .$$

Maintenant l'heure est venue de retourner aux équations (1.3). Comme on avait signalé dans la première étape, on a

$$E = u_\varepsilon - u_0$$

$$F_0 = -v \quad , \quad v \text{ solution du problème } (P_v) .$$

On a donc, grâce à (3.14) et (3.9)

$$||E|| \leq c\ |\varepsilon|^{1/4}\ ||\Phi||_{H^{1/2}} .$$

Ensuite, par l'équation (1.3)

$$||\Delta E|| \leq c\ |\varepsilon|^{-3/4}\ ||\Phi||_{H^{1/2}}$$

et finalement, par interpolation de ces deux inégalités,

$$||\text{grad } E|| \leq c\ |\varepsilon|^{-1/4}\ ||\Phi||_{H^{1/2}} . \qquad \square$$

Remarquons que si $r_0 > 0$ et $\omega \downarrow 0$, alors $|\varepsilon| \leq c\,\omega^{r_0}$, et que si $r_\infty > 0$ et $\omega \to \infty$, alors $|\varepsilon| \leq c(1+\omega^2)^{-r_\infty/2}$. Les estimations obtenues sont optimales. Voir [3]

On a donc démontré le résultat suivant

<u>Proposition</u> 3.2 (estimations sur la solution des équations (1.3) pour des fréquences "grandes" et "petites")

Supposons vérifiées les hypothèses (3.7), (3.7)' et (3.7)". Alors, si E est la solution de (1.3) avec $\omega = \omega_0$,

si $r_0 > 0$, $\forall\, \varepsilon_0 > 0$, $\exists\, c = c(\varepsilon_0) > 0$:

$$||E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c\,\omega_0^{r_0/4}\,||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$$||\mathrm{grad}\, E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c\,\omega_0^{-r_0/4}\,||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$$||\Delta E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c\,\omega_0^{-3r_0/4}\,||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$\forall\, 0 < \omega_0 < \varepsilon_0$;

si $r_\infty > 0$, $\forall\, M > 0$, $\exists\, c = c(M) > 0$:

$$||E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c(1+\omega^2)^{-r_\infty/8}\,||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$$||\mathrm{grad}\, E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c(1+\omega^2)^{+r_\infty/8}\,||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$$||\Delta E||_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leq c(1+\omega^2)^{+3r_\infty/8} \; ||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega,\mathbb{C})}$$

$\forall\ \omega_0 > M$. □

3.3. Etude de la dépendance de la solution de (1.3) par rapport au paramètre λ

Soit E_i la solution de (1.3) avec $\lambda = \lambda_i$, i=1,2. Posons $u = E_1 - E_2$, alors u est l'unique solution dans $H^1_0(\Omega,\mathbb{C})$ de l'équation variationnelle suivante

$$(3.15) \qquad (\text{grad } u, \text{grad } \bar{w}) + (\lambda_1 u, \bar{w}) = ((\lambda_1-\lambda_2)E_2, \bar{w}) \qquad \forall\ w \in H^1_0(\Omega,\mathbb{C}) .$$

Si l'on procède comme dans 3.1, on obtient aisément que, si λ_1 vérifie la condition (2.6) :

$$(3.16) \qquad \begin{aligned} &||E_1-E_2|| \leq c(\lambda_1)^{-1}_{r0}\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}\ ||E_2|| \\ &||\text{grad } (E_1-E_2)|| \leq c(\lambda_1)^{-1/2}_{r0}\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}\ ||E_2|| \\ &||\Delta(E_1-E_2)|| \leq c\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}\ ||E_2|| \end{aligned}$$

et que, si λ_1 vérifie la condition (2.6)'

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} &||E_1-E_2|| \leq c(\lambda_1)^{-1}_{io}\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}\ ||E_2|| \\ &||\text{grad } (E_1-E_2)|| \leq c(1 + ||\lambda_1||_{L^\infty}\ (\lambda_1)^{-1}_{io})\ (\lambda_1)^{-1/2}_{io} ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty} ||E_2|| \\ &||\Delta(E_1-E_2)|| \leq c\ ||\lambda_1||_{L^\infty}\ (\lambda_1)^{-1}_{io}\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}\ ||E_2|| \quad . \end{aligned}$$

On a ainsi démontré le résultat suivant :

Proposition (3.3) (dépendance de la solution des équations (1.3) par rapport au paramètre λ)

Soit E_i la solution des équations (1.3) avec $\lambda = \lambda_i$, pour $i=1,2$ (on suppose donc les hypothèses (2.6) et (2.6)' vérifiées par λ_1 et λ_2).

Alors il existe une constante $c = c(\lambda_1,\lambda_2) > 0$ telle que

$$||E_1-E_2|| \leq c\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}$$

$$||\text{grad}\ (E_1-E_2)|| \leq c\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}$$

$$||\Delta(E_1-E_2)|| \leq c\ ||\lambda_1-\lambda_2||_{L^\infty}$$

(l'expression précise de c peut être trouvée en utilisant (3.17), (3.16), la proposition (3.2), (3.5) et (3.4)). □

IV. SOLUTION DU PROBLEME D'EVOLUTION DONNE PAR LES EQUATIONS (1.8) : étude de l'application $\phi \to E$.

Commençons par bien préciser les hypothèses que vérifie l'application $\phi : \mathbb{R} \to \partial\Omega$. On a déjà supposé que, à ω fixée, l'on a $\Phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, voir les propositions (3.1) et (3.2). Autrement dit, compte tenu de la deuxième égalité de (1.7), on a déjà supposé que pour ω pp. dans $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier de ϕ est dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Maintenant, on précise le comportement de cette fonction par rapport à la fréquence

(4.1) $$\phi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R},H^{1/2}(\partial\Omega)) = \{v : F(v)(\omega) \in H^{1/2}(\partial\Omega),\ \omega \text{ pp. ds } \mathbb{R}$$
$$||v||^2_{H^{s_1,s_2}} = \int_{\mathbb{R}} \omega^{2s_1} (1+\omega^2)^{s_2-s_1} ||F(v)(\omega)||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} d\omega < \infty \}$$

(voir l'hypothèse (3.7) sur λ).

Il est donc naturel de considérer que l'application $\phi \to e$ va de $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R},H^{1/3}(\partial\Omega))$ dans l'espace $H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R},V)$ où en fait on va prendre $V = L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ ou V_E donné par la proposition (2.1).

Par la définition de l'espace $H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};V)$, voir (4.1), et étant donné que $F(e) = E$ par la première égalité de (1.7), l'appartenance de e à cet espace est uniquement déterminée par le fait que la norme $||E||_{H^{s_0,s_\infty}}$ soit finie, c'est-à-dire par le fait que l'intégrale suivante

$$(4.2) \qquad ||E||^2_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};V)} = \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{s_0} (1+\omega^2)^{s_\infty - s_0} ||E(\omega)||^2_V \, d\omega$$

ne diverge pas. La détermination de s_0 et s_∞ et des propriétés de continuité de l'application $\phi \to e$ se fait donc en travaillant directement sur l'intégrale (4.2) en utilisant les estimations a priori sur $||E||_V$ obtenues au paragraphe précédent. Ceci sera fait au paragraphe 4.1. Au paragraphe 4.2, on obtient la dépendance de cette application par rapport au paramètre λ.

4.1. Etude de quelques propriétés de l'application $\phi \to e$

Supposons que λ vérifie les hypothèses (3.7), (3.7)' et (3.7)" (rappelons que pour simplifier la présentation des résultats, on avait supposé - voir (3.1) - que $\lambda(-\omega) = \overline{\lambda(\omega)}$).

Alors, on a

$$||E||^2_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};V)} \leq \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$$

où

$$\Theta_1 = 2 \int_0^{\varepsilon} \omega^{2s_0} (1+\omega^2)^{s_\infty - s_0} ||E(\omega)||^2_V \, d\omega$$

$$\Theta_2 = 2 \int_{\varepsilon}^{M} \omega^{2s_0} (1+\omega^2)^{s_\infty - s_0} ||E(\omega)||_V^2 \, d\omega$$

$$\Theta_3 = 2 \int_{M}^{\infty} \omega^{2s_0} (1+\omega^2)^{s_\infty - s_0} ||E(\omega)||_V^2 \, d\Omega \quad .$$

Prenons d'abord $V = L^2(\Omega)$. Pour majorer les Θ_i, on va utiliser les propositions (3.1) et (3.2). Alors

$$\Theta_1 \leq 2\ c \int_0^{\varepsilon} |\omega|^{2s_0+r_0/2} (1+\omega^2)^{s_\infty-s_0} ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}} \, d\omega$$

$$\leq 2\ c \int_0^{\varepsilon} \{|\omega|^{2s_0+r_0/2-2s_1} (1+\omega^2)^{s_\infty-s_0+s_1-s_2}\} \; .$$

$$. \ |\omega|^{2s_1} (1+\omega^2)^{s_2-s_1} ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}} \, d\omega$$

$$\leq 2\ c \sup_{|\omega|\leq\varepsilon} \{ |\omega|^{2s_0+r_0/2-2s_1} (1+\omega^2)^{s_\infty+s_1-s_0-s_2}\} \; .$$

$$. \int_0^{\varepsilon} |\omega|^{2s_1} (1+\omega^2)^{s_2-s_1} ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}} \, d\omega \; ,$$

d'où la condition, $s_0 \geq s_1 - r_0/4$. En plus,

$$\Theta_2 \leq 2\ c \int_{\varepsilon}^{M} |\omega|^{2s_0} (1+\omega^2)^{s_\infty-s_0} ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}} \, d\omega$$

$$\leq 2\ c \sup_{\varepsilon\leq\omega\leq M} \{|\omega|^{2s_0-2s_1} (1+\omega^2)^{s_\infty+s_1-s_0-s_2}\} \; .$$

$$. \int_{\varepsilon}^{M} |\omega|^{2s_1} (1+\omega^2)^{s_2-s_1} ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}} \, d\omega$$

et

$$\Theta_3 \leq 2\ c \int_M^\infty |\omega|^{2s_0} (1+\omega^2)^{s\ -s_0+r_\infty/4} \ ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}}\ d\omega$$

$$\leq 2\ c\ \{\sup_{|\omega|\geq M} \{|\omega|^{2s_0-2s_1} (1+\omega^2)^{s_\infty-s_0-r_\infty/4+s_1-s_2}\}\}.$$

$$\cdot \int_M^\infty |\omega|^{2s_1} (1+\omega^2)^{s_2-s_1} \ ||\Phi(\omega)||^2_{H^{1/2}}\ d\omega$$

d'où la condition, $s_\infty \leq s_2 + r_\infty/4$.

Est donc évidente l'existence d'une constante $c > 0$, indépendante de ϕ telle que

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} ||e||_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} \leq c\ ||\phi||_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\Omega))} \\ \\ \text{où} : s_0 \geq s_1 - r_0/4 \quad , \quad r_0 > 0 \\ \qquad s_\infty \leq s_2 + r_\infty/4 \quad , \quad r_\infty > 0 \end{array} \right.$$

De la même façon, on obtient l'existence d'une constante $c > 0$, indépendante de ϕ telle que

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} ||\text{grad } E||_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} \leq c\ ||\phi||_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} \\ \\ \text{où} : s_0 \geq s_1 + r_0/4 \\ \qquad s_\infty \leq s_2 - r_\infty/4 \end{array} \right.$$

et

(4.5) $$\left\{\begin{aligned} & \|\Delta e\|_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} \leq c\, \|\phi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} \\ & \text{où : } s_0 \geq s_1+3r_0/4 \\ & \qquad s_\infty \leq s_2-3r_\infty/4 \end{aligned}\right.$$

On a donc démontré le résultat (optimal) suivant

Théorème(4.1)(sur l'application $\phi \to e$ définie par les équations (1.8))

Supposons vérifiées les hypothèses (3.7), (3.7)' et (3.7)" sur λ. Alors, l'application $\phi \to L_k e$, où $L_0 = \mathrm{Id}$, $L_1 = \mathrm{grad}$ et $L_2 = \Delta$, est continue de

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega)) \quad \text{dans} \quad H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$$

où

(4.6) $$\left\{\begin{aligned} & s_0 \geq s_1 + \tfrac{1}{4}(2k-1)r_0 \quad , \quad r_0 > 0\ , \\ & s_\infty \leq s_2 - \tfrac{1}{4}(2k-1)r_\infty \quad , \quad r_\infty > 0\ . \end{aligned}\right.$$ □

Il est clair que si $s_1 = 0$, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))$ coïncide avec l'espace $H^{s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))$ classique. Donc, plus s_2 est grand, plus ϕ est régulière. De même, plus s_∞ est grand, plus e est régulière.
Pour k=0, la valeur maximale que s_∞ peut prendre est $(s_2+r_\infty/4)$. Autrement dit, quand $|\lambda|$ croît, quand $\omega \to \infty$, comme ω^{r_∞} la régularité de e augmente en $r_\infty/4$ par rapport à celle de ϕ. Ce comportement de λ à l'infini a donc un effet régularisant sur e. D'autre part, on voit que, au fur et à mesure que k augmente, la régularité de $L_k e$ diminue, ce qui est tout à fait naturel.

D'autre part, le paramètre s_1 caractérise la régularité de $\omega \to \|\Phi(\omega)\|_{H^{1/2}}$ à l'origine.

4.2. Etude de la dépendance de la solution des équations (1.8) par rapport au paramètre λ.

Supposons que e_α est la solution de (1.8) avec $\lambda = \lambda_\alpha$, pour $\alpha = a,b$. Il est clair que si e_α est un élément de $H^{s_{0\alpha},s_{\infty\alpha}}(\mathbb{R};V=L^2(\Omega))$, alors la différence (e_a-e_b) appartient à l'espace $H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ où l'on a pris

$$s_0 \geq \max\{s_{0a},s_{0b}\}$$

$$s_\infty \leq \min\{s_{\infty a},s_{\infty b}\} .$$

Comme dans le paragraphe précédent, on va écrire

$$||e_a-e_b||^2_{H^{s_0,s_\infty}} \leq \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$$

et on va majorer les Θ_i à l'aide des inégalités (3.16), (3.17) et de la proposition(4.1).

Alors

$$\Theta_1 \leq 2\ c \int_0^\varepsilon \omega^{2s_0}(1+\omega^2)^{-s_0+s_\infty}.\{\omega^{2r_{0a}}(1+\omega^2)^{-r_{0a}-r_{\infty a}}\} .$$

$$\cdot\ ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty}\ ||E_b(\omega)||^2\ d\omega .$$

Supposons maintenant que $r_{0a} \geq r_{0b}$, alors on peut écrire, tenant compte du fait que $s_0 \geq s_{0b} \geq s_{0a}$:

$$\Theta_1 \leq c.\varepsilon^{2(s_0-s_{0b})}[\sup_{|\omega|\leq\varepsilon}\{\omega^{2r_{0a}}.||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty}\}].||e_b||^2_{H^{s_{0b},s_{\infty b}}}$$

$$\leq c.\varepsilon^{2(s_0-s_{0b})}[\sup_{|\omega|\leq\varepsilon}\{\omega^{2r_{0a}}.||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty}\}].||\phi||^2_{H^{s_1,s_2}}$$

(remarquons qu'on ne peut pas prendre $s_0 < s_{0b}$!).

De même

$$\Theta_2 \leq c \,[\sup_{\varepsilon\leq\omega\leq M} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty}].||\phi||^2_{H^{s_1,s_2}}$$

et finalement

$$\Theta_3 \leq c \int_M^\infty (1+\omega^2)^{s_\infty - r_{\infty a}} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty} ||E_b(\omega)||^2 \, d\omega \;;$$

si l'on suppose maintenant que $r_{\infty a} \geq r_{\infty b}$, on peut écrire, en tenant compte du fait que $s_\infty \leq s_{\infty b} \leq s_{\infty a}$:

$$\Theta_3 \leq c \,.\, [\sup_{\omega\geq M} (1+\omega^2)^{-r_{\infty a}} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||^2_{L^\infty}] \,.$$

$$.\; (1+M^2)^{s_\infty - s_{\infty b}} \,.\, ||\phi||^2_{H^{s_1,s_2}} \,.$$

Un résultat similaire s'obtient pour $k=1$ et $k=2$. On a ainsi obtenu le

Théorème(4.2)(sur la dépendance de l'application $\lambda \to e$ par rapport au paramètre λ)

Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 4.1. Soit e_α l'unique solution de (1.8) dans $H^{s_{0\alpha},s_{\infty\alpha}}(\mathbb{R};V)$ avec $\lambda = \lambda_\alpha$, pour $\alpha = a,b$, et Φ dans $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))$.

Posons, pour $k=0,1,2$

$$(4.7)\qquad \begin{cases} s_0 \geq \bar{s}_0 = \max\limits_{\alpha=a,b} \{s_1 + \frac{1}{4}(2k-1)r_{0\alpha}\} \\ s_\infty \leq \bar{s}_\infty = \min\limits_{\alpha=a,b} \{s_2 - \frac{1}{4}(2k-1)r_{\infty\alpha}\} \end{cases} \qquad \text{(voir (4.6))}$$

Alors la différence $L_k e_a - L_k e_b$, L_k comme au théorème (4.1) appartient à l'espace $H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$.

En plus, pour ε et $M \in \mathbb{R}^+$ donnés, il existe une constante $c > 0$ indépendante de ϕ, telle que

$$(4.8)\qquad ||L_k e_a - L_k e_b||_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} \leq$$

$$c\ .\ \{\varepsilon^{(s_0-\bar{s}_0)} . \sup_{|\omega|\leq\varepsilon} \{\omega^{\max\{r_{0a},r_{0b}\}} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||_{L^\infty}\} +$$

$$+ \sup_{\varepsilon\leq|\omega|\leq M} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||_{L^\infty} +$$

$$+ (1+M^2)^{1/2(s_\infty-\bar{s}_\infty)} .$$

$$.\ \sup_{|\omega|\geq M} \{(1+\omega^2)^{-\max\{r_{\infty a},r_{\infty b}\}} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||_{L^\infty}\}.$$

$$.\ ||\phi||_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} . \qquad \square$$

Supposons que l'on prenne une excitation ϕ de plus en plus régulière, c'est-à-dire que l'on prenne s_2 de plus en plus grand. Alors s_∞ reste fixé tandis que $\bar{s}_\infty$ augmente de plus en plus et donc

$$(1+M^2)^{1/2(s_\infty-\bar{s}_\infty)}$$

devient de plus en plus petite. Autrement dit, plus ϕ est régulière, plus l'influence de $\lambda(\omega)$, pour ω grande, sur la solution de (1.8) est négligeable.

De même, supposons que l'on prenne s_1 de plus en plus petit. Alors s_0 reste fixé tandis que $\bar{s}_0$ diminue avec s_1 et

$$\varepsilon^{(s_0-\bar{s}_0)}$$

devient de plus en plus petit. Autrement dit, plus S_1 est petit plus l'influence de $\lambda(\omega)$ pour ω dans un voisinage de l'origine, sur la solution de (1.8) est négligeable.

On finit ce paragraphe en réécrivant l'inégalité (4.8), d'une façon plus simple

$$||L_k(e_a-e_b)||_{H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} \leq$$

$$\leq c\ \{ \sup_{\varepsilon\leq|\omega|\leq M} ||\lambda_a(\omega)-\lambda_b(\omega)||_{L^\infty} + 0(\varepsilon^{(s_0-\bar{s}_0)}) + 0(M^{-s_\infty+\bar{s}_\infty})\}$$

où $s_0 \geq \bar{s}_0$ et $\bar{s}_\infty \geq s_\infty$, $\bar{s}_0$ et $\bar{s}_\infty$ donnés par (4.7).

V. EXEMPLES

Réécrivons les équations (1.8) :

$$(1.8)\qquad \begin{cases} -\Delta e + K * e = 0 & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ e = \phi & \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \end{cases}$$

où l'on a pris

(5.1) $\qquad K = F^{-1}(\lambda)$.

5.I. L'équation de la chaleur

Posons $K(x,t) = \nu^{-1}(x)\ \delta'(t)$. L'équation (1.8) devient alors :

$$\begin{cases} \partial_t e - \nu \Delta e = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ e = \phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R} . \end{cases}$$

Si $\nu \in L^\infty(\Omega)$ et $\exists\ \nu_0 > 0 : \nu(x) \geq \nu_0$ x pp. dans Ω, on obtient donc l'équation de la chaleur.

Par (5.1)

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x)\ i\ \omega$$

la condition d'existence et unicité de la solution des équations (1.3), (2.6)' est vérifiée pour $\omega \neq 0$. Si Ω est un ouvert borné, la condition (2.6) est vérifiée pour $\omega \in \mathbb{R}$. λ vérifie aussi les conditions (3.6).

Quand $\omega \to \infty$, $\lambda(x,\omega)$ vérifie les conditions (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 0$ et $r_\infty = 1$. Le théorème 4.1 affirme donc que l'application

$$\phi \to L_k\ e$$

où $L_0 = \mathrm{Id}$, $L_1 = \mathrm{grad}$, $L_2 = \Delta$, va de

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega)) \quad \text{dans} \quad H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$$

où

$$\begin{cases} s_0 \geq s_1 \\ s_\infty \leq s_2 - \frac{1}{4}(2k-1) \qquad k=0,1,2 \ . \end{cases}$$

5.2. L'équation de la chaleur perturbée

Si maintenant on prend $K(x,t) = \nu^{-1}(x)\ \{\delta'(t)-k(t)\}$, on obtient une perturbation de l'équation de la chaleur (on prend ν comme dans 5.1, à savoir,

$$\begin{cases} \partial_t e - \nu \Delta e = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)e(s)ds & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ e = \phi & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Par (5.1), on a :

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x) \ . \ \{i\omega - Fk(\omega)\} \ .$$

a) Prenons $k(t) = H(t)$, H étant la fonction de Heavyside. Avec ce choix, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)e(s)ds = \int_{-\infty}^{t} e(s)ds \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

et, de plus

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x) \ . \ \{i\omega - \frac{1}{i\omega}\}\nu = \nu^{-1}(x) \ . \ i\ \omega^{-1}(1+\omega^2) \ ;$$

dans ce cas, λ vérifie les hypothèses (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 1$ et $r_\infty = 1$. Le théorème (4.1) affirme donc que l'application $\phi \to L_k e$ va de

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega)) \quad \text{dans} \quad H^{s_0,s_\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$$

où :

$$\begin{cases} s_0 \geq s_1 + \frac{1}{4}(2k-1) \\ s_\infty \leq s_2 - \frac{1}{4}(2k-1) \end{cases} \qquad k=0,1,2 \ .$$

L'introduction de cette perturbation ne change en rien donc la régularité de la solution; en effet, s_∞ est exactement le même. Par contre, elle modifie le nombre s_0 en l'<u>améliorant</u> de 1/4 pour $k=0$ et en le <u>déteriorant</u> de 1/4 pour $k=1$, et de 3/4 pour $k=2$.

b) Prenons maintenant $k(t) = t \quad \forall\, t > 0$, $k(t) = 0 \quad \forall\, t \leq 0$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)e(s)ds = \int_{-\infty}^{t} (t-s)e(s)ds \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

et

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x)\ \{i\omega + \frac{1}{\omega^2}\} = \nu^{-1}(x)\{\frac{1+i\omega^2}{(1+\omega^2)^{3/2}}\}.\omega^{-2}.(1+\omega^2)^{3/2} \ .$$

Donc, λ vérifie (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 2$ et $r_\infty = 1$.
On aura cette fois-ci

$$\begin{cases} s_0 \geq s_1 + \frac{1}{2}(2k-1) \\ s_\infty \leq s_1 - \frac{1}{4}(2k-1) \end{cases} \qquad k=0,1,2 \ .$$

Encore une fois, on voit que cette perturbation ne change pas la régularité de la solution, mais modifie le nombre s_0 en l'<u>améliorant</u> de 1/2 (le double que dans le cas précédent) pour $k=0$, et en le <u>déteriorant</u> de 1/2 pour $k=1$, et de 3/2 pour $k=2$.

c) Dans a) et b), on a pris des perturbations causales, c'est-à-dire telles que $k(t) = 0$ si $t < 0$ qui ont comme point commun de ne pas appartenir à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Elles introduisent donc <u>une très forte mémoire</u> dans le système : dans a), toutes les valeurs de e dans le passé ont un même poids; par contre, dans b) ce sont les plus anciennes valeurs qui prennent un poids de plus en plus considérable.

On a vu que l'introduction de cette mémoire forte ne change en rien les propriétés de régularité de la solution, mais a une très forte influence sur le nombre s_0.

Maintenant, on va considérer des <u>mémoires faibles</u>.

Prenons d'abord $k(t) = \delta_{t_0}(t)$ (mémoire <u>vraiment</u> faible!). Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)e(s)ds = e(t-t_0) \qquad (t_0 \geq 0 \;!)$$

et

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x).\{i\omega - \exp(-i\omega t_0)\}$$

$$= \nu^{-1}(x).\{-\cos(\omega t_0) + i(\omega + \sin(\omega t_0))\}$$

$$= \nu^{-1}(x).\{\frac{i\omega - \exp(-i\omega t_0)}{(1+\omega^2)^{1/2}}\}\,(1+\omega^2)^{1/2} \;.$$

Supposons que $\nexists \; n \in \mathbb{Z} : t_0 = \pi/2 + n\pi$; ceci empêche $\lambda(x,.)$ de s'annuler. Alors λ vérifie (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 0$ et $r_\infty = 1$ et donc on obtient <u>les mêmes nombres</u> s_0 <u>et</u> s_∞ <u>que pour l'équation de la chaleur non perturbée</u>.

d) Prenons maintenant une mémoire un peu plus forte : $k \in L^1(\mathbb{R})$ (k toujours causale). Etant donné que

$$||Fk||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||k||_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$$

on a :

$$\lambda(x,\omega) = \nu^{-1}(x) \;.\; \{i\omega - Fk(\omega)\}$$

$$= \nu^{-1}(x) \;.\{\frac{i\omega - Fk(\omega)}{(1+\omega^2)^{1/2}}\} \;.\; (1+\omega^2)^{1/2}$$

Si, pour simplifier le résultat, l'on suppose que $Fk(0) \neq 0$, λ vérifie donc les hypothèses (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 0$ et $r_\infty = 1$. Encore une fois, on obtient les mêmes nombres s_0 et s_∞ que pour l'équation de la chaleur non perturbée.

e) Pour finir, on va prendre une mémoire légèrement plus forte que la précédente : $k = \partial_t \underset{\sim}{k}$ où $\underset{\sim}{k} \in L^1(\mathbb{R})$. Ceci est le cas des équations de Maxwell avec polarisation !! On a $Fk(\omega) = i\omega . F\underset{\sim}{k}(\omega)$ et donc

$$||Fk(\omega)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \omega ||\underset{\sim}{k}||_{L^1(\mathbb{R})} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lambda(x,\omega) &= \nu^{-1}(x) \,.\, \{i\omega - i\omega F\underset{\sim}{k}\} \\
&= \nu^{-1}(x) \,.\, i\omega \,.\, \{1-F\underset{\sim}{k}(\omega)\} \qquad \text{(comparer avec 5.1)} \\
&= \nu^{-1}(x) \,.\{\frac{(1-F\underset{\sim}{k}(\omega)).i\omega}{(1+\omega^2)^{1/2}}\} \, (1+\omega^2)^{1/2} .
\end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'on est exactement dans le même cas que l'exemple 5.1 : on obtient les mêmes nombres s_0, s_∞ que pour l'équation de la chaleur non perturbée.

5.3. L'équation des ondes

Si l'on pose $K(x,t) = \nu^{-1}(x)\delta''(t)$, ν comme dans 5.1, l'équation (1.8) devient

$$\begin{cases} \partial_{tt} e - \nu \Delta e = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ e = \phi & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

c'est-à-dire elle devient l'équation des ondes.

Dans ce cas, on a :

$$\lambda(x,\omega) = -\psi^{-1}(x)\ \omega^2$$

la condition d'existence et d'unicité de la solution de (1.3). (2.6)' est satisfaite pour $\omega \neq 0$. Si Ω est borné, c'est alors (2.6) qui est vérifiée pour $\omega \in \mathbb{R}$. Comme dans 5.1, les **conditions** (3.6) sont aussi vérifiées et, quand $\omega \to \infty$, λ vérifie (3.7), (3.7)' et (3.7)" avec $r_0 = 0$ et $r_\infty = 2$. On a donc

$$\begin{cases} s_0 \geq s_1 \\ s_\infty \leq s_2 - \frac{1}{2}(2k-1) \qquad k=0,1,2\ . \end{cases}$$

VI. QUELQUES COMMENTAIRES ET CONCLUSION

On a donc étudié par une approche directe en Fourier, les solutions de l'équation (1.8), dont un cas particulier sont les équations de Maxwell 1D et 2D.

L'avantage de cette approche est que maintenant on travaille sur un problème stationnaire, elliptique dans le cas traité ici!, qui est toujours plus facile à aborder. En plus, il est possible avec cette méthode d'obtenir avec plus de facilité des résultats optimaux de régularité (ce que l'on a fait avec l'aide de la théorie des perturbations singulières). Et finalement, cette approche permet de reporter sur la solution du problème d'évolution les propriétés de la solution du problème stationnaire d'une façon très simple.

Dans un prochain travail, on envisage de traiter les équations de Maxwell 3D, avec différentes sortes de conditions aux bords, avec la méthode que l'on a utilisée ici.

VII. BIBLIOGRAPHIE

[1] B. COCKBURN, "Etude mathématique et numérique des équations de Maxwell dans des milieux polarisables", Thèse de 3ème Cycle, Université Paris IX, 3 Juin 1983.

[2] B. COCKBURN, P. JOLY, "Justification théorique d'une méthode de résolution des équations de Maxwell en milieu polarisables, rapport INRIA, à paraître.

[3] J.L. LIONS, "Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lectures Notes in Mathematics, 323, Springer Verlag, 1973.

[4] W. RUDIN, "Functional Analysis", Mc. Graw-Hill, 1974.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique